

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

**УТВЕРЖДАЮ**

Заведующий кафедрой  
теории функций и геометрии



Семенов Е.М.

23.03.2025 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

**Б1.О.37 Элементы теории вычетов**

- 1. Код и наименование направления:** 01.03.01 Математика
- 2. Профиль:** Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление
- 3. Квалификация выпускника:** Бакалавр.
- 4. Форма обучения:** Очная
- 5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:**  
Кафедра теории функций и геометрии
- 6. Составители программы:**  
Сухочева Л.И. – кандидат физ.-мат. наук, доцент;  
Стенюхин Л.В. – кандидат физ.-мат. наук, доцент.
- 7. Рекомендована:** Научно-методическим Советом математического факультета  
протокол № 0500-03 от 18.03.2025 г.
- 8. Учебный год:** 2026/2027

**Семестр:** 4

## 9. Цели и задачи учебной дисциплины:

### *Цели освоения учебной дисциплины:*

- подготовка студента к восприятию математического аппарата специальных дисциплин, чтению специальной литературы;
- получение базовых знаний и формирование основных навыков в области теории функций комплексных переменных, необходимых для решения задач, возникающих в теоретических и прикладных исследованиях;
- развитие логического мышления;
- формирование необходимого уровня математической подготовки для понимания других математических дисциплин.

### *Задачи учебной дисциплины:*

- овладение студентами основными математическими понятиями и приемами комплексного анализа;
- выработка умений решать типовые задачи, приобретение навыков работы со специальной математической литературой.

## 10. Место учебной дисциплины в структуре ОПОП:

Учебная дисциплина «Элементы теории вычетов» относится к обязательной части Блока 1. Дисциплина базируется на знаниях, полученных в рамках школьного курса «Математика», курсов математического анализа и логики. Изучается параллельно с дисциплиной «Комплексный анализ». Предназначена для более глубокого освоения отдельных разделов теории функций комплексного переменного, совершенствования навыков использования методов комплексного анализа для решения практических задач.

Приобретенные в результате обучения знания, умения и навыки являются основанием для успешного изучения как дальнейших базовых курсов, так и специальных, приобретенные знания могут быть полезны в научно-исследовательской работе.

## 11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ОПК-1	Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.	ОПК-1.1	Применяет базовые знания, полученные в области математических и(или) естественных наук	Знать: - базовые понятия фундаментальной математики Уметь: - использовать базовые знания, полученные в области математических и (или) естественных наук в профессиональной деятельности. Владеть: - навыками выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний
		ОПК-1.2	Оценивает и формулирует актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики	

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час. —  
2 / 72.

**Форма промежуточной аттестации - зачет.****13. Трудоемкость по видам учебной работы**

Вид учебной работы		Трудоемкость		
		Всего	По семестрам	
			4 семестр	
Аудиторные занятия		72	72	
в том числе:	лекции			
	практические	34	34	
	лабораторные			
Самостоятельная работа		38	38	
в том числе: курсовая работа (проект)				
Форма промежуточной аттестации - <i>зачет</i> .				
Итого:		72	72	

**13.1. Содержание дисциплины**

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК
<b>2. Практические занятия</b>			
2.1	Комплексные числа. Комплексная плоскость. Комплекснозначные функции вещественной переменной	Комплексные числа, комплексная плоскость; модуль и аргумент комплексного числа, стереографическая проекция, сфера Римана, расширенная комплексная плоскость; множества на плоскости, Комплекснозначные функции вещественного переменного. Понятие кривой, области.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6790">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6790</a> , <a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=15695">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=15695</a>
2.2	Интеграл по кривой от комплекснозначной функции вещественной переменной.	Интеграл по кривой от комплекснозначной функции вещественной переменной. Примеры	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6790">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6790</a> , <a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=15695">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=15695</a>
2.3	Функции комплексного переменного	Функции комплексного переменного; предел функции; непрерывность.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6790">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6790</a> , <a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=15695">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=15695</a>
2.4	Конформные отображения	Целая линейная и дробно-линейная функции, их свойства, общий вид дробно-линейного отображения круга на себя и верхней полуплоскости на круг; экспонента и логарифм, степень с произвольным показателем; функция Жуковского; тригонометрические и гиперболические функции.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6790">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6790</a> , <a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=15695">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=15695</a>

2.5	Дифференцируемость и голоморфность функций комплексного переменного	Дифференцируемость и голоморфность функций комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Примеры. Гармонические функции.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6790">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6790</a> , <a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=15695">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=15695</a>
2.6	Интеграл от функции по комплексной переменной.	Интеграл по комплексной переменной, первообразная, формула Ньютона-Лейбница; Способы вычисления.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6790">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6790</a> , <a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=15695">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=15695</a>
2.7	Изолированные особые точки	Классификация изолированных особых точек однозначного характера по поведению функции и ряду Лорана; полюс, порядок полюса; существенно особая точка, теорема Сохоцкого-Вейерштрасса; бесконечно удаленная точка как особая.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6790">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6790</a> , <a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=15695">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=15695</a>
2.8	Ряд Лорана.	Ряд Лорана, область его сходимости; разложение аналитической функции в ряд Лорана, единственность разложения.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6790">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6790</a> , <a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=15695">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=15695</a>
2.9	Вычет. Способы нахождения	Определение вычета, теоремы Коши о вычетах, вычисления вычетов; применения вычетов; логарифмический вычет, принцип аргумента; теорема Руше и теорема Гурвица.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6790">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6790</a> , <a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=15695">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=15695</a>
2.10	Применение вычетов к суммированию рядов.	Применение вычетов к суммированию рядов. Примеры.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6790">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6790</a> , <a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=15695">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=15695</a>
2.11	Применение вычетов к вычислению интегралов.	Применение вычетов к вычислению интегралов. Примеры	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6790">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6790</a> , <a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=15695">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=15695</a>
2.12	Вычеты и логарифмическая производная.	Вычеты и логарифмическая производная. Примеры	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6790">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6790</a> , <a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=15695">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=15695</a>
2.13	Применение вычетов в гидродинамике.	Решение задач	

### 13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1	Комплексные числа. Комплексная плоскость. Комплекснозначные функции вещественной переменной		2	-	4	6
2	Интеграл по кривой от комплекснозначной функции вещественной переменной.		2	-	2	4
3	Функции комплексного переменного		2	-	2	4
4	Конформные отображения		4	-	4	8
5	Дифференцируемость и голоморфность функций комплексного переменного		2	-	4	6
6	Интеграл от функции комплексному переменному.		4	-	4	8
7	Изолированные особые точки		2	-	2	4
8	Ряд Лорана.		2	-	2	4
9	Вычет. Способы нахождения		4	-	4	8
10	Применение вычетов к суммированию рядов.		2	-	2	4
11	Применение вычетов к вычислению интегралов.		4	-	4	8
12	Вычеты и логарифмическая производная		2	-	2	4
13	Применение вычетов в гидродинамике.		2		2	4
Итого			34	-	38	72

### 14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

В процессе преподавания дисциплины используются такие виды учебной работы, как практические занятия и самостоятельной работы обучающихся. Проведение практических занятий направлено на умение решения практических задач. Для успешного и качественного освоения дисциплины необходима планомерная, повседневная самостоятельная работа.

При изучении курса «Элементы теории вычетов» обучающимся для понимания и качественного усвоения учебного материала рекомендуется следующая последовательность действий.

При подготовке к практическим занятиям следует повторить основные понятия по темам, рассмотреть примеры. Решая задачи, предварительно понять какой теоретический материал нужно использовать. Наметить план решения, попробовать на его основе решить практические задачи.

На практическом занятии каждый его участник должен быть готовым к ответам на все теоретические вопросы рассматриваемой темы. На последнем практическом занятии проводится итоговая контрольная работа по результатам, которой выставляется зачет (незачет).

1. С целью уяснения теоретических положений, разрешения спорных ситуаций следует задавать преподавателю уточняющие вопросы.

2. Работа с основной и дополнительной литературой по дисциплине в библиотеке или в системе «Электронный университет».

3. Рекомендуется ознакомиться с настоящей Рабочей программой дисциплины.

При подготовке к практическим занятиям, обучающимся важно помнить, что их задача, отвечая на основные вопросы плана занятия и дополнительные вопросы преподавателя, показать свои знания и кругозор, умение логически построить ответ, владение математическим аппаратом и иные коммуникативные навыки, умение отстаивать свою профессиональную позицию.

Освоение дисциплины предполагает не только обязательное посещение аудиторных занятий и активную работу на них, но и регулярную самостоятельную учебную деятельность в течение семестра: изучение, рекомендуемой литературы, самостоятельное освоение понятийного аппарата, подготовку к практическим занятиям, выполнение индивидуальных заданий, подготовку к зачету.

Все выполняемые студентами самостоятельно задания подлежат последующей проверке преподавателем. Для успешной самостоятельной работы необходим тесный контакт с преподавателем. Результаты текущих аттестаций учитываются преподавателем при проведении промежуточной аттестации.

Успешное освоение курса предполагает активное, творческое участие студента путем планомерной, повседневной работы.

## **15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины**

### **а) основная литература:**

№ п/п	Источник
1	Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат - М: Наука, 2002. - 736 с.
2	Свешников А.Г. Теория функций комплексного переменного / А.Г.Свешников, А.Н.Тихонов - М.: Наука, 2001. - 320 с.
3	Волковыский Л.И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного: Учеб. пособие для студ.вузов / Л.И. Волковыский, Г.Л.Лунц, И.Г.Араманович. - 4-е изд., перераб. - М.: Физматлит, 2002. - 312 с.
4	Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного //Изд-во «Лань»: ЭБС. – URL: <a href="https://e.lanbook.com/book/322#book_name">https://e.lanbook.com/book/322#book_name</a>

### **б) дополнительная литература:**

№ п/п	Источник
5	Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций / А.И. Маркушевич - М.: Наука, 1978. - 388 с.
6	Евграфов М.А. Аналитические функции / М.А.Евграфов. - М.: Наука, 1965. - 424 с.
7	Сборник задач по теории аналитических функций / М.А.Евграфов, К.А.Бежанов, Ю.В.Сидоров и др.; Под ред. М.А.Евграфова - М.: Наука, 1972. - 286 с.
8	Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. / П.Е.Данко, А.Г.Попов, Т.Я.Кожевникова. - М.: Высшая школа, 1997. - Ч.2. - 416 с.

### **в) базы данных, информационно-справочные и поисковые системы:**

№ п/п	Источник
9	Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного //Изд-во «Лань»: ЭБС. – URL: <a href="https://e.lanbook.com/book/322#book_name">https://e.lanbook.com/book/322#book_name</a>
10	<a href="http://www.math.vsu.ru">http://www.math.vsu.ru</a> – официальный сайт математического факультета ВГУ
11	<a href="http://www.math.msu.ru">http://www.math.msu.ru</a> – официальный сайт мехмата МГУ
12	<a href="http://e.lanbook.com">e.lanbook.com</a>

## 16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

Курс дисциплины построен таким образом, чтобы позволить студентам максимально проявить способность к самостоятельной работе. Студент может дополнить список использованной литературы иными источниками, не представленными в списке рекомендованной литературы, и в дальнейшем использовать собственные подготовленные учебные материалы при написании курсовых и дипломных работ.

№ п/п	Источник
1	Волковыский Л.И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного: Учеб. пособие для студ. вузов/ Л.И. Волковыский, Г.Л.Луниц, И.Г.Араманович. - 4-е изд., перераб. - М.: Физматлит, 2002. - 312 с.

## 17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ, электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):

При реализации дисциплины используются следующие образовательные технологии: логическое построение дисциплины, установление межпредметных связей, обозначение теоретического и практического компонентов в учебном материале, включение элементов дистанционных образовательных технологий.

Изложение учебного материала основано на принципе системности, преемственности и последовательности и направлено на развитие интеллектуальных умений, профессиональных компетенций, формирование творческой личности высококвалифицированного специалиста, способного к саморазвитию, самообразованию, инновационной деятельности.

Дисциплина может реализовываться с применением дистанционных образовательных технологий, например, на платформе «Электронный университет ВГУ» (<https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6790>, <https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=15695> ).

## 18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Для проведения лекционных и практических занятий используется учебная аудитория: специализированная мебель.

Для самостоятельной работы обучающихся – компьютерный класс, оснащенный оргтехникой, необходимым программным обеспечением, электронными учебными пособиями, законодательно-правовой нормативной поисковой системой, имеющий выход в глобальную сеть:

Ubuntu (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://ubuntu.com/download/desktop> ); Visual Studio Community (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия <https://visualstudio.microsoft.com/ru/vs/community/> ); LibreOffice (GNU Lesser General Public License (LGPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://ru.libreoffice.org/about-us/license/> ); Lazarus (GNU Lesser General Public License (LGPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://www.lazarus-ide.org/index.php> ); Free Pascal (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://www.freepascal.org/faq.html> ); Python 2/3 (Python Software Foundation License (PSFL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://docs.python.org/3/license.html> ); 46 Gimp (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://www.gimp.org/about/> ); Inkscape (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://inkscape.org/about/license/> ); MiKTeX (Free Software Foundation (FSF), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://miktex.org/copying> ); TeXstudio (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://texstudio.org/> ); Maxima (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или

свободное ПО, лицензия: <http://maxima.sourceforge.net/faq.html> ); Denwer (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <http://www.denwer.ru/faq/other.html> ); 1С: Предприятие 8 (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: [https://v8.1c.ru/predpriyatie/questions\\_licence.htm](https://v8.1c.ru/predpriyatie/questions_licence.htm) ); Foxit Reader (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия <https://www.foxitsoftware.com/pdfreader/eula.html> ); Deductor Academic (Academic Free License, бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://basegroup.ru/system/files/documentation/licence-deductor-academic-20160322.pdf> ); WinDjView (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://windjview.sourceforge.io/ru/> ); 7-Zip (GNU Lesser General Public License (LGPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://www.7-zip.org/license.txt> ); Mozilla Firefox (Mozilla Public License (MPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://www.mozilla.org/en-US/MPL/> ); VMware Player (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: [https://www.vmware.com/download/open\\_source.html](https://www.vmware.com/download/open_source.html) ); VirtualBox (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: [https://www.virtualbox.org/wiki/Licensing\\_FAQ](https://www.virtualbox.org/wiki/Licensing_FAQ) ); Astra Linux Common Edition (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://dl.astralinux.ru/astra/stable/orel/> ); PostgreSQL (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://www.postgresql.org/about/licence/> ); GeoGebra (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://www.geogebra.org/license> ); R (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://www.r-project.org/Licenses/> ); Wing-101 (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://wingware.com/license/wing101> ); Loginom Community Edition (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://loginom.com/platform/pricing> ); MySQL (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://downloads.mysql.com/docs/licenses/>)

## 19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций:

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1.	Комплексные числа. Комплексная плоскость. Комплекснозначные функции вещественной переменной	ОПК-1.	ОПК-1.1, ОПК-1.2.	Устный опрос. Практическое задание.
2.	Интеграл по кривой от комплекснозначной функции вещественной переменной.	ОПК-1.	ОПК-1.1, ОПК-1.2.	Устный опрос. Практическое задание.
3.	Функции комплексного переменного	ОПК-1.	ОПК-1.1, ОПК-1.2.	Устный опрос. Практическое задание.
4.	Конформные отображения	ОПК-1.	ОПК-1.1, ОПК-1.2.	Устный опрос. Практическое задание.
5.	Дифференцируемость и голоморфность функций комплексного переменного	ОПК-1.	ОПК-1.1, ОПК-1.2.	Устный опрос. Практическое задание.
6.	Интеграл от функции по комплексной переменной.	ОПК-1.	ОПК-1.1, ОПК-1.2.	Устный опрос. Практическое задание.
7.	Изолированные особые точки	ОПК-1.	ОПК-1.1, ОПК-1.2.	Устный опрос. Практическое задание.

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
8.	Ряд Лорана.	ОПК-1.	ОПК-1.1, ОПК-1.2.	Устный опрос. Практическое задание.
9.	Вычет. Способы нахождения	ОПК-1.	ОПК-1.1, ОПК-1.2.	Устный опрос. Практическое задание.
10.	Применение вычетов к суммированию рядов.	ОПК-1.	ОПК-1.1, ОПК-1.2.	Устный опрос. Практическое задание
11.	Применение вычетов к вычислению интегралов.	ОПК-1.	ОПК-1.1, ОПК-1.2.	Устный опрос. Практическое задание.
12.	Вычеты и логарифмическая производная	ОПК-1.	ОПК-1.1, ОПК-1.2.	Устный опрос. Практическое задание.
13.	Применение вычетов в гидродинамике.	ОПК-1.	ОПК-1.1, ОПК-1.2.	Устный опрос. Практическое задание.
Промежуточная аттестация форма контроля – зачет				Контрольная работа

## 20 Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

### 20.1 Текущий контроль успеваемости

Оценка знаний, умений, навыков, характеризующая этапы формирования компетенций в рамках изучения дисциплины осуществляется в ходе текущего контроля в форме устного опроса и проверки выполнения решений практических заданий.

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

#### Примерный перечень вопросов к практическим занятиям

1. Расширенная комплексная плоскость. Стереографическая проекция. Сфера Римана.
2. Линейная функция комплексного переменного.
3. Функция  $f(z) = \frac{1}{z}$ . Образ окружности  $|z - z_0| = R$  при отображении этой функцией.
4. Дробно-линейная функция. Структура отображения, задаваемого дробно-линейной функцией.
5. Показательная функция комплексного переменного. Комплексный логарифм. Определение и простейшие свойства.
6. Тригонометрические функции комплексного переменного. Определения и простейшие свойства.
7. Гиперболические функции комплексного переменного. Определения и простейшие свойства.
8. Отображение плоскости посредством функции  $e^z$ .
9. Дифференцируемость функций в смысле комплексного анализа. Производная и дифференциал.
10. Теорема Коши-Римана.

11. Гармонические функции. Сопряженные гармонические функции.
12. Интеграл от комплекснозначной функции действительной переменной.
13. Определение и простейшие свойства интеграла от функции комплексной переменной по кривой.
14. Теорема Коши-Гурса.
15. Теорема Коши-Гурса для многосвязной области.
16. Независимость интеграла от вида пути интегрирования.
17. Первообразная функция. Формула Ньютона-Лейбница.
18. Интегральные формулы Коши для производных голоморфной функции. Следствие о бесконечной дифференцируемости голоморфной функции.
19. Формула Тейлора.
20. Нуль функции, кратность нуля. Представление голоморфной функции в окрестности нуля.
21. Последовательности голоморфных функций.
22. Ряды голоморфных функций. Почленное дифференцирование и интегрирование.
23. Степенные ряды. Теорема Абеля. Формулы для коэффициентов.
24. Свойство круга сходимости степенного ряда. Формула Коши-Адамара.
25. Разложение голоморфной функции в ряд Тейлора.
26. Ряд Лорана. Формулы для коэффициентов.
27. Разложение функций, голоморфных в кольце, в ряд Лорана.
28. Особые точки. Виды особых точек.
29. Вычет функции в точке. Теорема Коши о вычетах.
30. Формула Лорана.
31. Вычисление вычета в полюсе. Частные случаи.
32. Голоморфность и особенности на бесконечности.
33. Разложение в ряд Лорана в окрестности изолированной особой точки.
34. Вычет функции на бесконечности. Теорема Коши о полной сумме вычетов.
35. Простейшие типы несобственных интегралов. Интегралы вида  $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx$ .
36. Интегралы вида  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix} dx$ .
37. Логарифмическая функция. Точка логарифмического ветвления.
38. Степенная функция с произвольным показателем степени. Точка алгебраического ветвления.
39. Логарифмическая производная и ее свойства

### Примерный перечень практических заданий

1. Найти образ области  $D$  при отображении функцией  $w = f(z)$ :  

$$D = \left\{ z : |z| > \frac{1}{2}, \operatorname{Re} z > 0 \right\}; \quad w = z^2.$$
2. Найти образ области  $D$  при отображении функцией  $w = f(z)$ :  

$$D = \left\{ z : |z| = 2; \frac{\pi}{8} < \arg z < \frac{\pi}{4} \right\}; \quad w = z^4.$$
3. Может ли функция быть дифференцируемой в точке  $z_0$  и не быть голоморфной в этой точке? Может ли функция, голоморфная в области, быть суммой двух функций, не голоморфных в этой области?
4. Выяснить, какая часть комплексной плоскости растягивается, а какая сжимается при отображении  $w = e^z$ .

5. Выяснить, какая часть комплексной плоскости растягивается, а какая сжимается при отображении  $w = \ln z$ .
6. Для функции  $f(z) = \sin \bar{z}$  указать точки, в которых существует производная  $f'(z)$ , и найти эту производную.
7. Вычислить  $\operatorname{th}\left(\ln 3 + \frac{\pi i}{4}\right)$ .
8. Вычислить  $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - i \ln 2\right)$ .
9. Вычислить интеграл  $\int_0^1 \frac{1}{1+it} dt$ .
10. Вычислить интеграл  $\int_0^1 \frac{1+it}{1-it} dt$ .
11. Вычислить интеграл  $\int_{\gamma} \bar{z} e^z dz$ , где  $\gamma$  – отрезок прямой от точки  $z_1 = 1$  до точки  $z_2 = i$ .
12. Вычислить интеграл  $\int_{\gamma} \cos \bar{z} dz$ , где  $\gamma$  – отрезок прямой от точки  $z_1 = \pi$  до точки  $z_2 = \frac{\pi}{2} + i$ .
13. Вычислить интеграл  $\int_{\gamma} z^2 \cos z dz$ , где  $\gamma$  – отрезок прямой от точки  $z_1 = i$  до точки  $z_2 = 1$ .
14. Найти нули функции  $f(z) = 1 + \cos z$  и определить их кратности.
15. Найти кратность нуля  $z_0 = 0$  для функции  $f(z) = \frac{z^8}{z - \sin z}$ .
16. Пусть  $\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$ . Следует ли из этого, что  $f(z)$  – аналитическая функция внутри замкнутой кривой  $\gamma$ ?
17. Вычислить интеграл  $\oint_{|z+i|=1} \frac{\sin z}{(z+i)^2} dz$ .
18. Найти радиус сходимости степенного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} (1+i)^n z^n$ .
19. Найти радиус сходимости степенного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{1-i}\right)^n$ .
20. Функцию  $f(z) = \frac{1}{3-2z}$  разложить по степеням разности  $z-3$ .
21. Функцию  $f(z) = \frac{z^2}{(z+1)^2}$  разложить в ряд по степеням  $z$  и найти область сходимости полученного ряда.

22. Может ли разложение некоторой функции в ряд Лорана по степеням разности  $z - z_0$  содержать:

- а) конечное число слагаемых с отрицательными степенями этой разности;
- б) конечное число слагаемых с положительными степенями этой разности;
- в) бесконечное число слагаемых с отрицательными степенями этой разности;
- г) бесконечное число слагаемых с положительными степенями этой разности?

23. Вычислить, используя понятие вычета и логарифмической производной:

$$\int_{|z|=2} \frac{z dz}{z^2 + 1}; \quad \int_{|z|=\frac{\pi}{4}} \operatorname{ctg} z dz$$

24. Найти количество жидкости, протекающее в единицу времени через боковую поверхность кругового цилиндра с единичной высотой, если сечением цилиндра является круг с центром  $z = 0$  и радиусом  $r = 2$ , а течение порождается источником мощности  $m$ , расположенным в точке  $z = 1$  и точечным вихрем с интенсивностью  $\gamma$ , расположенным в точке  $z = 0$ .

25. Найти количество жидкости, протекающее в единицу времени через боковую поверхность кругового цилиндра с единичной высотой, если сечением цилиндра является круг с центром  $z = 0$  и радиусом  $r = 2$ , а течение порождается источником мощности  $m$ , расположенным в точке  $z = 0$  и точечным вихрем с интенсивностью  $\gamma$ , расположенным в точке  $z = 1$ .

Описание технологии проведения

Текущий контроль представляет собой проверку усвоения учебного материала практического характера, регулярно осуществляемую на занятиях.

Текущий контроль предназначен для проверки хода и качества формирования компетенций, стимулирования учебной работы обучающихся и совершенствования методики освоения новых знаний. Он обеспечивается проведением опросов по теоретическому материалу, выполнением практических заданий.

При текущем контроле уровень освоения учебной дисциплины и степень сформированности компетенции определяются оценками «зачтено» и «незачтено». Систематичность, объективность, аргументированность – главные принципы, на которых основаны контроль и оценка знаний обучающихся.

Требования к выполнению заданий (шкалы и критерии оценивания)

При проведении текущего контроля успеваемости используются следующие

**показатели:**

- 1) знание основных понятий и определений;
- 2) умение использовать стандартные методы для решения типовых задач;
- 3) оптимальность хода решения;
- 4) логика изложения, рассуждений;
- 5) правильность выполнения расчетов;
- 6) самостоятельность выводов.

**Критерии оценки компетенций (результатов обучения) при текущей аттестации:**

Зачтено: выполнение практических заданий и ответы в ходе опроса соответствуют перечисленным показателям, обучающийся дает ответы на дополнительные вопросы, может быть не совсем полные. Демонстрирует умение решать задачи, возможно с некоторыми ошибками.

Незачтено: в ходе опроса ответы обучающегося не соответствуют ни одному из перечисленных показателей. Обучающийся демонстрирует фрагментарные знания и умения или их отсутствие.

## 20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация проводится в соответствии с Положением о промежуточной аттестации обучающихся по программам высшего образования. Предназначена для определения уровня освоения всего объема учебной дисциплины и проводится в форме зачета.

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

### Примерное содержание заданий итоговой контрольной работы

1. Найти образ области  $D$  при отображении функцией  $w = f(z)$ :

$$D = \left\{ z: 0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}; \operatorname{Re} z > 0 \right\}; w = e^{2z}.$$

2. Найти образ области  $D$  при отображении функцией  $w = f(z): D = \left\{ z: 0 < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{4} \right\}; w = \operatorname{ctg} z.$

3. Вычислить интеграл  $\int_{\gamma} (1 + i - 2\bar{z}) dz$ , где  $\gamma$  – линия, соединяющая точки  $z_1 = 0$  и

$$z_2 = 1 + 2i,$$

а) отрезок прямой;

б) дуга параболы;

в) ломаная  $z_1 z_3 z_2$ , где  $z_3 = 1$ .

Почему получаются разные ответы?

4. Вычислить интеграл  $\int_{\gamma} \operatorname{Im} z dz$ , где  $\gamma$ :

а) отрезок прямой от точки  $z_1 = 0$  до точки  $z_2 = 1 + 2i$ ;

б) дуга параболы  $y = 2x^2$  от точки  $z_1 = 0$  до точки  $z_2 = 1 + 2i$ . Почему получаются разные ответы?

5. Существует ли функция, аналитическая в точке  $z = 0$  и принимающая в точках

$$z = \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \dots) \text{ значения:}$$

а)  $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \dots, \frac{1}{2k}, \frac{1}{2k}, \dots;$

б)  $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots?$

6. Функция  $\sin \frac{1}{1-z}$  имеет бесконечную последовательность нулей, сходящуюся к точке 1, но тем не менее эта функция отлична от постоянной. Не противоречит ли это теореме единственности?

7. Вычислить интеграл  $\int_{2i-\infty}^{2i+\infty} \frac{z \sin zt}{z^2 + 1} dz, \quad t > 0.$

8. Вычислить интеграл 
$$\int_{i-\infty}^{i+\infty} \frac{z \cos zt}{(z+1)^2} dz, \quad t > 0.$$

#### Описание технологии проведения

Промежуточная аттестация по дисциплине преследует цель оценить работу обучающихся за курс, полученные обучающимися знания, умения и уровень приобретенных компетенций, их прочность, развитие творческого мышления, приобретение навыков самостоятельной работы, умение синтезировать полученные знания и применять их при решении практических задач.

#### Зачет

Проводится на последнем практическом занятии. Итоговая оценка выставляется по результатам выполнения итоговой контрольной работы и посещаемости занятий.

Требования к выполнению заданий (шкалы и критерии оценивания)

При проведении промежуточной аттестации в форме зачета используются следующие **показатели**:

- 1) умение применять стандартные методы для решения типовых задач;
- 2) оптимальность хода решения;
- 3) правильность выполнения расчетов;
- 4) посещаемость практических занятиях.

#### **Шкала оценивания:**

Зачтено: выполнение заданий контрольной работы соответствуют перечисленным показателям. Более половины заданий контрольной работы выполнены верно. Отсутствие не более, чем на двух практических занятиях без уважительной причины. За каждые два пропущенных занятия для получения зачета требуется дополнительно решить одну практическую задачу из перечня.

Незачтено: менее половины заданий контрольной работы решены верно, более половины дополнительных практических заданий выполнены не верно.

Соотношение показателей, критериев и шкалы оценивания результатов обучения.

Критерии оценивания	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
Обучающийся в полной мере владеет понятийным аппаратом данной области комплексного анализа. Применяет стандартные методы для решения типовых задач. Ход решения задач оптимален. Расчеты выполнены без ошибок, Все задания контрольной работы выполнены верно. Занятия посещаются регулярно.	Повышенный уровень	зачтено
Применяет стандартные методы для решения типовых задач. Ход решения задач оптимален. В расчетах присутствуют не существенные неточности. Не выполнено одно задания контрольной работы. Занятия посещаются практически регулярно.	Базовый уровень	зачтено
Демонстрирует частичные знания, или имеет не полное представление о стандартных методах решения, допускает существенные ошибки в вычислениях. Половина заданий имеют неточности в решении. Имеются пропуски занятий.	Пороговый уровень	зачтено
Ответ обучающегося не соответствует всем четырем из перечисленных показателей. Обучающийся демонстрирует	—	незачтено

отрывочные, фрагментарные знания, допускает грубые ошибки, не умеет решать задачи. Более половины заданий выполнены не верно. Имеются пропуски занятий.		
---	--	--

### 20.3 Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ

#### 1) Тестовые задания

- Задания закрытого типа - средний уровень сложности

##### Test1

Корнями уравнения  $x^3 + 36x$  над полем комплексных чисел являются ...

- 1)  $-6i$ ;      3)  $6i$ ;      5) 0.  
2)  $-6$ ;      4)  $6$ ;

##### Test2

Число  $i^{2021}$  равно

- 1)  $-i$ ;      2)  $-1$ ;      3)  $i$ ;      4) 1.

##### Test3

Мнимая часть частного  $\frac{4}{1+i}$  равна

- 1)  $-2$ ;      2)  $-4$ ;      3) 2;      4) 4.

##### Test4

Если функция  $w(z) = u(x, y) + v(x, y)$  голоморфна в области комплексной плоскости. Тогда её производная вычисляется по формуле

- 1)  $w'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial y}$ ;      2)  $w'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial v}{\partial y}$ ;

3)  $w'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$ ;

4)  $w'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}$ .

##### Test5

Какие функции дифференцируемы в смысле комплексного анализа на всей комплексной плоскости

- 1)  $e^z \cos z$ ;      2)  $e^z \operatorname{tg} z$ ;      3)  $\frac{\sin z}{e^z}$ ;      4)  $\frac{e^z}{\sin z}$ .

- Задания открытого типа (короткий ответ)

##### Test6

Функция является голоморфной в точке тогда и только тогда, когда в этой точке выполнены условия ... .

Ответ: Коши-Римана

Test7

Напишите пропущенное число  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{dz}{z-a} = \dots$

Ответ: 1

Test8

Напишите пропущенное число  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{dz}{(z-a)^2} = \dots$

Ответ: 0

Test9

Вычет в любой точке голоморфной функции равен ... (напишите число).

Ответ: 0

Test10

Для функций комплексного переменного могут существовать три вида особых точек: устранимая особая точка, ... и существенно особая точка. Напишите пропущенное слово.

Ответ: полюс

**Верные ответы выделены цветом.**

Требования к выполнению заданий, шкалы и критерии оценивания

1) Тестовые задания.

- Задания закрытого типа – средний уровень сложности (выбор одного варианта ответа, верно/неверно):

- 1 балл – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

- Задания закрытого типа - средний уровень сложности (множественный выбор):

- 2 балла – указаны все верные ответы;
- за каждый верный ответ ставится 1 балл, при этом за каждый неверный ответ вычитается 1 балл;
- 0 баллов — не выбрано ни одного верного ответа.

- Задания закрытого типа (на соответствие):

- 2 балла – все соответствия определены верно;
- за каждое верное сопоставление ставится количество баллов, равное максимальному (2 балла), деленному на количество предлагаемых в вопросе сопоставлений;
- 0 баллов – ни одно сопоставление не выбрано верно.

- Задания открытого типа (короткий ответ):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.